ΑΓ.ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ 11 -- ΠΕΙΡΑΙΑΣ -- 18532 -- ΤΗΛ. 210-4224752, 4223687

# Ενδεικτικές Απαντήσεις θεμάτων μαθηματικών προσανατολισμού

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σχολικό βιβλίο σελίδα 135
**Α2.** α) ψευδής β) παράδειγμα f(x)=|x| σελίδα 99
**Α3.** Σελίδα σχολικού βιβλίου 73
**Α4.** α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Σωστό

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \ln\mathrm{x}\,, \mathrm{x} > 0 \qquad \mathrm{g}(\mathrm{x}) = \frac{x}{1-x}\,, x \neq 1$

$Dfog = \{x \in Ag / g(x) \in Af\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \frac{x}{1-x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x(1-x) > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0,1)$$

$(fog)(\chi) = \ln(\frac{x}{1-x})$

**Β2.** $\mathrm{h}(\mathrm{x}) = (\mathrm{fog})(\mathrm{x}) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right), \quad x \in (0,1)$

$$h'(x) = \left(\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right)' = \frac{1}{\frac{x}{1-x}} \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x}{x} \cdot \frac{1(1-x) - x(1-x)'}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1-x+x}{x(1-x)} = \frac{1}{x(1-x)} > 0, \qquad x \in (0,1)$$

Άρα η h(x) αύξουσα στο (0,1)
Άρα η h(x) 1:1 οπότε αντιστρέφεται. Η h↑ και συνεχής άρα το σύνολο τιμών είναι

$$h\,(0,1) = \left(\lim_{x\to 0^+} h(x), \lim_{x\to 1^-} h(x)\right) = (-\infty, +\infty)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)\right) = \lim_{x\to 1^-}(\ln x - \ln(1-x)) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$h(x) = y \Leftrightarrow y = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = e^y \Leftrightarrow$$

$$x = (1-x)e^y \Leftrightarrow x = e^y - xe^y \Leftrightarrow x + xe^y = e^y \Leftrightarrow$$

$$x(1+e^y) = e^y \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{1+e^y} \text{ άρα } h^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}\; x \in \mathbb{R}$$

**Β3.**

$$\Phi(\chi)=h^{-1}(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$$

$$\Phi'(\chi)=\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)'=\frac{(e^x)'(e^x+1)-e^x(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=$$

$$=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}>0 \text{ άρα } \Phi\uparrow$$

$$\Phi''(\chi)=\left(\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\right)'=\frac{(e^x)'(e^x+1)^2-e^x\left[(e^x+1)^2\right]'}{(e^x+1)^4}=$$

$$=\frac{e^x(e^x+1)^2-2e^{2x}(e^x+1)}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x(e^x+1)(e^x+1-2e^x)}{(e^x+1)^4}=$$

$$=\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$$

$$\Phi''(\chi)=0\Rightarrow\frac{e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}=0\Leftrightarrow 1-e^x=0$$

$$e^x=1\Leftrightarrow \chi=0$$

$$\Phi''(\chi)>0\Rightarrow 1-e^x>0$$

$$e^x<1\Leftrightarrow \chi<0$$

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Φ΄΄(x) | + | 0 | — |
| Φ(x) | $\cup$ ↑ | | $\cap$ ↓ |
| | | σ.κ | |

Σημείο καμπής το Α(0,1/2)

**B4.**

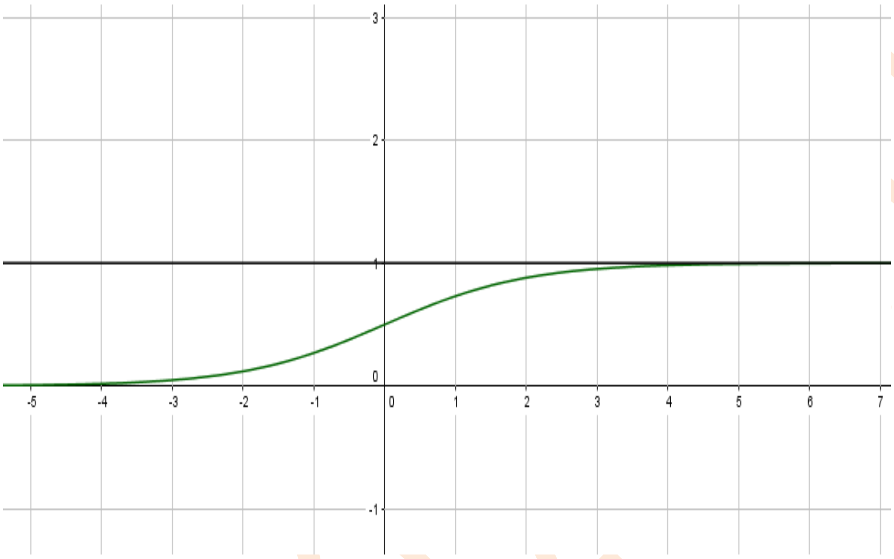
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1+e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

Άρα y=1 οριζόντια στο $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=0$$

Άρα y=0 οριζόντια στο $-\infty$

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Φ΄΄ | + | 0 | − |
| Φ΄ | + | | + |
| Φ | | | |




**ΘΕΜΑ Γ**

Γ1.

Οι εφαπτομένες της f(x) που άγονται από το $A(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2})$ είναι

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)\Leftrightarrow \text{για } x=\frac{\pi}{2}, y=-\frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\cdot(\frac{\pi}{2}-x_0)\Leftrightarrow$$

$$-\frac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\frac{\pi}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu x_0+x_0\cdot\sigma\upsilon\nu x_0 \quad (1).$$

Παρατηρούμε ότι $x_0=0$ και $x_0=\pi$ .

Θεωρούμε

$$g(x)=-\frac{\pi}{2}+\eta\mu x+\frac{\pi}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu x-x\cdot\sigma\upsilon\nu x$$

$$g'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\frac{\pi}{2}\cdot\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x=\eta\mu x\cdot(x-\frac{\pi}{2})$$

| x | 0 | π/2 | π |
|---|---|---|---|
| g'(x) | - | | + |
| g(x) | ↘ | | ↗ |

$g(\frac{\pi}{2})=1-\frac{\pi}{2}\prec 0$

Επομένως $g(x)\prec 0 \quad \forall x\in(0,\pi)$

Επομένως η g έχει μοναδικές ρίζες x=0 και x=π.

Άρα από την $x_0=0$ και $x_0=\pi$ .

Άρα O(0,0) και B(π,0) τα σημεία επαφής της $C_f$ με τις εφαπτομένες .

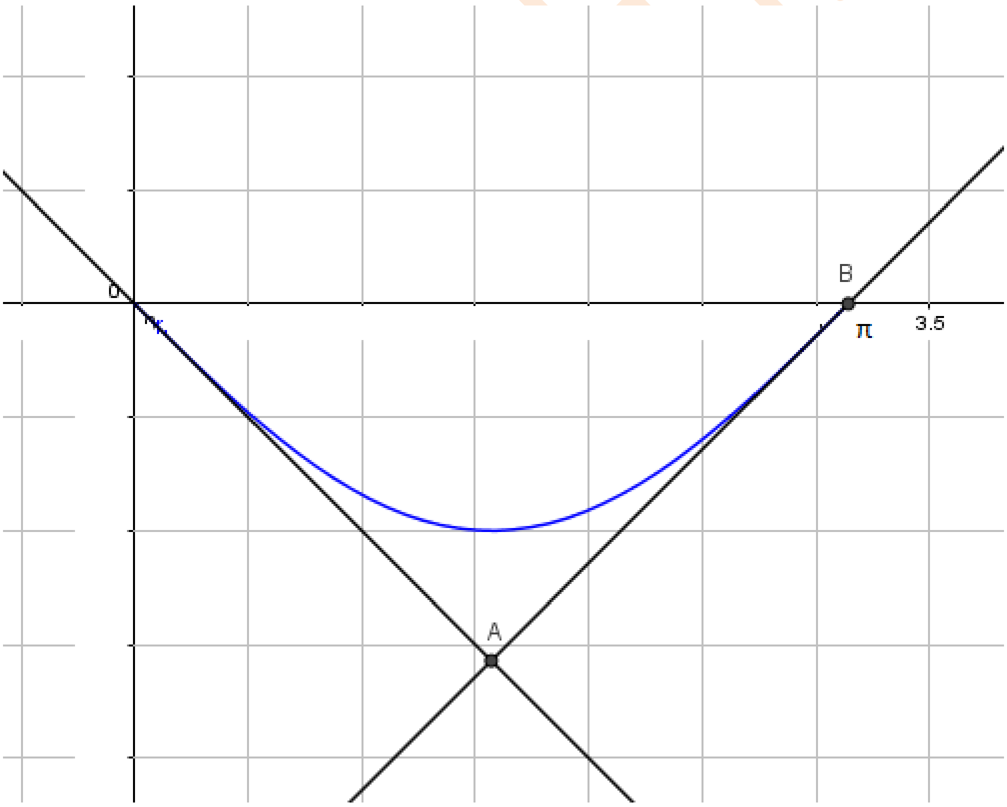
Εξ. Εφαπτομένη στο O(0,0):

$y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Leftrightarrow y-0=-x\Leftrightarrow y=-x$

Εξωτερική εφαπτομένη στο B(π,0):

$y-0=1\cdot(x-\pi)\Leftrightarrow y=x-\pi$

**Γ2.**




$E_3=(OAB)=\frac{1}{2}\cdot OB\cdot|y_A|=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$

$$E_2 = \int_0^{\pi} \eta\mu x dx = \left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 2$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{E_3 - E_2}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} - 1 = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

**Γ3.**

Έχουμε f κυρτή άρα και η $C_f$ βρίσκεται πάνω από την $\varepsilon_2$ επομένως.

$f(x) \geq x - \pi \Leftrightarrow$

$-\eta\mu x \geq x - \pi \Leftrightarrow$

$-\eta\mu x - x - \pi \geq 0.$

Επομένως

$$\lim_{x\to\pi} \frac{1}{-\eta\mu x - x + \pi} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{-\eta\mu x + x}{-\eta\mu x - x + \pi} = \lim_{x\to\pi}(-\eta\mu x + x) \cdot \frac{1}{-\eta\mu x - x + \pi} = \pi \cdot (+\infty) = +\infty$$

**Γ4.**

Από το ερώτημα Γ2, έχω

$-\eta\mu x \geq x - \pi \Leftrightarrow$

$-\eta\mu x - x + \pi \geq 0 \Leftrightarrow$

$\frac{-\eta\mu x - x + \pi}{x} \geq 0 \Leftrightarrow$

$-\frac{\eta\mu x}{x} - 1 + \frac{\pi}{x} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\int_1^e (-\frac{\eta\mu x}{x} - 1 + \frac{\pi}{x})dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx - \int_1^e (1 - \frac{\pi}{x})dx \geq 0 \Leftrightarrow$

$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx \geq \int_1^e (1 - \frac{\pi}{\chi})dx \Leftrightarrow$

$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx \geq \left[x - \pi \ln x\right]_1^e = e - \pi - 1$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**

$$f(x)=\begin{cases}(-x)^{\frac{4}{3}}, x\in[-1,0)\\ e^x\eta\mu x, x\in[o,\pi]\end{cases}$$

Η f(x) συνεχής για $x\in[-1,0)$ ως πράξεις συνεχών

Η f(x) συνεχής για $x\in(0,\pi]$ ως πράξεις συνεχών

Εξετάζω στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to 0^-}(-x)^{\frac{4}{3}}=0 \quad \lim_{x\to 0^+}(e^x\eta\mu x)=0 \quad , f(0)=0$$

Η f συνεχής στο $x_0=0$

Οπότε η f συνεχής στο [-1,π]

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}-0}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1}\cdot(-x)'}{1}=\lim_{x\to 0^-}-\frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\eta\mu x-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(e^x\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1$$

Άρα δεν υπάρχει η παράγραφος οπότε το $x_0=0$ είναι κρίσιμο.

$1\le x<0$ η f παραγωγίζεται ως πράξεις παραγώγων

$$f_1'(x)=\left(\sqrt[3]{x^4}\right)'=\left[(-x)^{\frac{4}{3}}\right]'=\frac{4}{3}\cdot(-x)^{\frac{1}{3}}(-1)=-\frac{4}{3}\cdot(-x)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=-\frac{4}{3}\sqrt[3]{(-x)}<0$$

$0<x\le\pi$ η f παραγωγίζεται ως πράξεις παραγώγων

$$f_2'(x)=\left(e^x\eta\mu x\right)'=e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x=e^x\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)$$

$$f_2'(x)=0\Rightarrow e^x\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)=0\Leftrightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0$$

$\eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow \varepsilon\varphi x=-1\Rightarrow x=\frac{3\pi}{4}$ κρίσιμο σημείο

**Δ2.**

$$f'(x)=e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x(\varepsilon\varphi x+1)$$

$$(0,\frac{\pi}{2}):\ \left.\begin{array}{l}\varepsilon\varphi x+1>0\\ \sigma\upsilon\nu x>0\end{array}\right\}\rightarrow f'(x)>0$$

$(\frac{\pi}{2},\pi)$: $\Phi(x)=\varepsilon\varphi x+1$

$$\Phi'(x)=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0$$

Φ γνησίως αύξουσα

Τελικά

| x | -1 | | 0 | | π/2 | | 3π/4 | | π |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f΄ | | - | | + | | + | | - | |
| f | | ↘ | | ↗ | | | | ↘ | |

f(-1)=1 f(0)=0

$$f(\frac{3\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$f(A)=[0,\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}]$$

**Δ3.** Για το πρόσημο της συνάρτησης $f(x)$ έχουμε

Ισχύει ότι $e^{4x}\geq 1(1)$ για $x\in[0,\pi]$

Ακόμα έχουμε $\eta\mu x\leq 1\Leftrightarrow -\eta\mu x\geq -1(2)$

$(1)+(2)\Rightarrow e^{4x}-\eta\mu x\geq 0$. Επομένως $e^x\cdot\left(e^{4x}-\eta\mu x\right)\geq 0\Leftrightarrow h(x)\geq 0$.

Άρα $-E(\Omega)=-\int_0^\pi|h(x)|dx=-\int_0^\pi h(x)dx=\int_0^\pi\left(e^x\eta\mu x-e^{5x}\right)dx=\int_0^\pi\left(e^x\eta\mu x\right)dx-\int_0^\pi\left(e^{5x}\right)dx$

- $I=\int_0^\pi\left(e^x\eta\mu x\right)dx=\left[e^x\eta\mu x\right]_0^\pi-\int_0^\pi\left(e^x\sigma\upsilon\nu x\right)dx=-\int_0^\pi\left(e^x\sigma\upsilon\nu x\right)dx=$

$=-\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi-\int_0^\pi\left(e^x\eta\mu x\right)dx=e^\pi+1-I$.

$$I=e^\pi+1-I\Leftrightarrow I=\frac{e^\pi+1}{2}$$

- $\int_0^\pi e^{5x}dx=\left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^\pi=\frac{e^{5\pi}-1}{5}$

Επομένως έχουμε $-\mathrm{E}(\Omega)=\frac{e^\pi+1}{2}-\frac{e^{5\pi}-1}{5}\Rightarrow\mathrm{E}(\Omega)=-\frac{e^\pi+1}{2}+\frac{e^{5\pi}-1}{5}$

**Δ4.** Από το Δ2 και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f$ προκύπτει:

$$f(x)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow 2\cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot f(x)\leq\sqrt{2}\Leftrightarrow 16\cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot f(x)\leq 8\sqrt{2}(1)$$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν, $x=\frac{3\pi}{4}$

Ακόμα, $-e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot(4x-3\pi)^2\le 0\,(2)$

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν, $x=\frac{3\pi}{4}$

$(1)+(2)\Rightarrow 16\cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot(4x-3\pi)^2\le 8\sqrt{2}$.

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x=\frac{3\pi}{4}$.

Άρα μοναδική λύση $x=\frac{3\pi}{4}$

**ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ**

ΜΠΑΞΕΒΑΝΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ

ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΥ ΔΕΣΠΟΙΝΑ

ΚΑΤΣΙΜΠΡΑΣ ΕΥΘΥΜΗΣ

ΛΕΜΠΕΣΗ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ ΜΑΡΙΑ

ΑΝΔΡΙΟΠΟΥΛΟΣ ΓΙΩΡΓΟΣ

ΧΑΡΙΣΗ ΣΤΕΛΛΑ

**ΟΡΟΣΗΜΟ ΡΑΦΗΝΑ**

ΛΙΑΚΟΥΡΑ ΕΛΕΝΗ

ΜΑΛΑΚΗΣ ΘΑΝΑΣΗΣ

ΚΑΠΡΑΛΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

**Τα θέματα κρίνονται ως ιδιαιτέρως απαιτητικά-μερικά ερωτήματα ακραία όσο αφορά τη διδαχθείσα ύλη.**

**ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ**